На правах рукописи

УДК 514.7+512.5

ТОЛСТИХИНА Галина Аркадьевна

АЛГЕБРА И ГЕОМЕТРИЯ ТРИ-ТКАНЕЙ, ОБРАЗОВАННЫХ СЛОЕНИЯМИ РАЗНЫХ РАЗМЕРНОСТЕЙ

Специальность: 01.01.04 — геометрия и топология

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени доктора физико-математических наук

Казань — 2007

Работа выполнена на кафедре функционального анализа
и геометрии математического факультета
Тверского государственного университета.

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук, профессор
ОНИЩИК Аркадий Львович

доктор физико-математических наук, профессор
КИРИЧЕНКО Вадим Федорович

доктор физико-математических наук, профессор
ШУРЫГИН Вадим Васильевич

Ведущая организация —
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

Защита состоится 31 мая 2007 г. в 14.30 час. на заседании диссертационного совета Д 212.081.10 при ГОУ ВПО "Казанский государственный университет им. В.И. Ульянова-Ленина" по адресу: 420008 Казань, ул. Кремлевская, 18, корп. 2, ауд. 217.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке им. Н.И. Лобачевского Казанского государственного университета им. В.И. Ульянова-Ленина.

Автореферат разослан "   " апреля 2007 г.

Ученый секретарь диссертационного совета
кандидат физико-математических наук, доцент
Малахальцев М.А.

1 Общая характеристика работы

Актуальность темы исследования. Основы дифференциально-геометрической теории три-тканей были заложены участниками гамбургского геометрического семинара, руководимого Вильгельмом Бляшке (1926-1928 годы). Бляшке, его ученики и коллеги, среди которых наиболее известны имена Бола, Рейдемейстера и Томсена, определили различные типы конфигураций на криволинейной ткани и показали, что каждой конфигурации соответствует некоторое алгебраическое тождество. Основные результаты этих исследований были опубликованы в монографии [11], в книге [10], а также в многочисленных обзорах, см., например, [9] и [5]. Указанные геометрические и алгебраические конструкции были позже обобщены С.Черном и М.А. Акивисом для многомерных три-тканей $W(r, r, r)$, образованных тремя r-мерными слоениями на дифференцируемом многоообразии размерности $2r$, см. [25], [2], [7].

Теория тканей имеет богатые приложения в разных разделах математики и в физике, см. об этом в [10], [7] и в работе автора [6]. Наиболее важные приложения связаны с тем обстоятельством, что три-ткань $W(r, r, r)$ представляет собой геометрический аналог локальной гладкой квазигруппы или лупы, вообще говоря, неассоциативной. Это позволило применить методы и результаты теории тканей в тех разделах математики и физики, где активно используются неассоциативные структуры [16], [18], [20], [21].

Приложения классической теории тканей ограничены тем, что в уравнении ткани $z = f(x, y)$ переменные имеют одинаковую размерность. Очевидно, что построение аналогичной теории для гладких функций с разной размерностью переменных значительно расширит область приложения результатов.

Дифференциально-геометрическую теорию три-тканей $W(p, q, r)$, образованных тремя слоениями размерностей p, q, r на многообразии размерности $p+q$, начали развивать М.А. Акивис и В.В. Гольдберг [6]. Они нашли структурные уравнения ткани, определили тензоры кручения и кривизны, выяснили геометрический смысл обращения в нуль тензора кручения и некоторых его подтензоров. В.В. Гольдберг в [13] исследовал некоторые специальные классы три-тканей $W(p, q, r)$ и нашел соответствующие тензорные условия. Однако, вследствие разной размерности слоев, образующих ткань, оказалось невозможным *непосредственно* обобщить для три-тканей $W(p, q, r)$ многие важные понятия классической теории три-тканей $W(r,r,r)$ (координатная лупа, конфигурация, ассоциативность, коммутативность и т.д.), благодаря которым она и получила столь широкие приложения.

Таким образом, возникла проблема обобщения основных алгебраических и геометрических понятий классической теории тканей для тканей, образованных слоениями разных размерностей.

Цель работы. В настоящей работе рассматривается многомерная три-ткань $W(p,q,r)$, определяемая уравнением

$$z = f(x,y),$$

где $f : X \times Y \to Z$ — гладкая функция, $x \in X \subset R^q$, $y \in Y \subset R^p$, $z \in Z \subset R^{p+q-r}$; $p,q,r \in N$, $r < p+q$, $p \leq q \leq r$, и в каждой точке области определения ранги матриц Якоби $(\partial f/\partial x)$ и $(\partial f/\partial y)$ максимальны. Три-ткань $W(p,q,r)$ образована на многообразии $\mathcal{M} = X \times Y$ (размерности $p+q$) тремя слоениями общего положения

$$\lambda_1 : \ x = const, \quad \lambda_2 : \ y = const, \quad \lambda_3 : \ z = f(x,y) = const$$

размерностей соответственно p, q и r. Цель работы состоит в исследовании алгебраических и геометрических свойств три-тканей $W(p,q,r)$.

Основные понятия классической теории три-тканей и задачи исследования. К классической теории тканей относят три-ткани $W(r,r,r)$, образованные слоениями одинаковой размерности r на $2r$-мерном многообразии. Их начали изучать Г. Бол [12] и С. Черн [25]. Последний дал инвариантное описание специальных классов тканей с помощью введенных им тензоров кручения и кривизны. Дальнейшее развитие этой теории связано с выходом в свет в 1955 г. книги В. Бляшке [10] (русский перевод М.А. Акивиса, 1959 год) и работ М.А. Акивиса [1], [2]. С этого периода центр исследования три-тканей переместился в Россию. Изложение полученных результатов и библиографию см. в обзорах [9], [5] и в монографии [7].

Приведем основные понятия и результаты классической теории, которые обобщаются в настоящей работе для три-тканей $W(p,q,r)$.

Уравнение $z = f(x,y)$ ткани $W(r,r,r)$, где $|\partial f/\partial x| \neq 0$ и $|\partial f/\partial y| \neq 0$, с одной стороны, связывает параметры слоев, проходящих через одну точку области $\mathcal{N} \subset X \times Y$, а с другой стороны, определяет трехбазисную бинарную операцию $z = x \cdot y \equiv f(x,y)$, $(\cdot) : X \times Y \to Z$. Условия

$|\partial f/\partial x| \neq 0$ и $|\partial f/\partial y| \neq 0$ означают, что уравнение $z = x \cdot y$ локально однозначно разрешимо относительно каждого из своих аргументов, а потому определяет в области $\mathcal{N} \subset X \times Y$ локальную дифференцируемую квазигруппу, называемую локальной координатной квазигруппой три-ткани [2]. В классической теории изучаются, в основном, локальные свойства три-тканей, инвариантные относительно локальных диффеоморфизмов

$$x \to \alpha(x) = \tilde{x}, \quad y \to \beta(y) = \tilde{y}, \quad z \to \gamma(z) = \tilde{z}.$$

Тройка локальных биекций (α, β, γ) называется изотопическим преобразованием и задает отношение эквивалентности на множестве три-тканей. При изотопических преобразованиях слои ткани $W(r,r,r)$ переходят в слои эквивалентой ей ткани $\tilde{W}(r,r,r)$, а точки пересечения слоев ткани $W(r,r,r)$ — в точки пересечения соответствующих слоев ткани $\tilde{W}(r,r,r)$. Поэтому изотопические преобразования сохраняют инцидентность точек и слоев ткани, следовательно, сохраняют свойство конфигураций, образованных слоями ткани и их точками пересечения, быть замкнутыми.

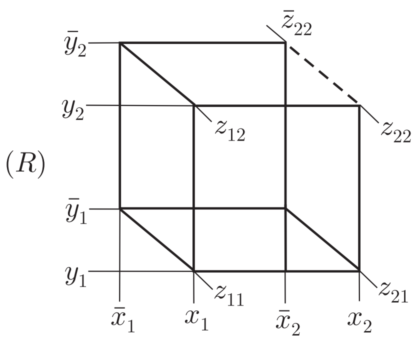

Рис. 1

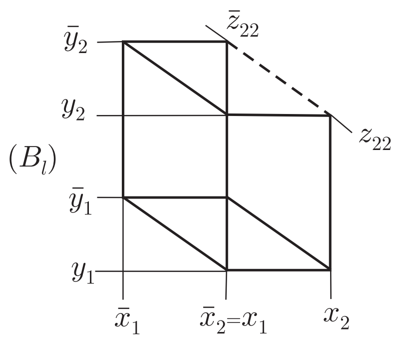

Рис. 2

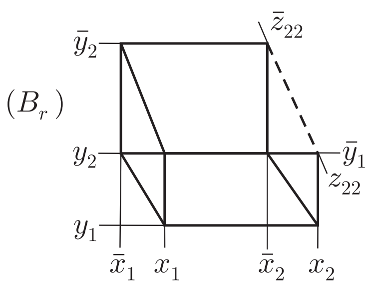

Рис. 3

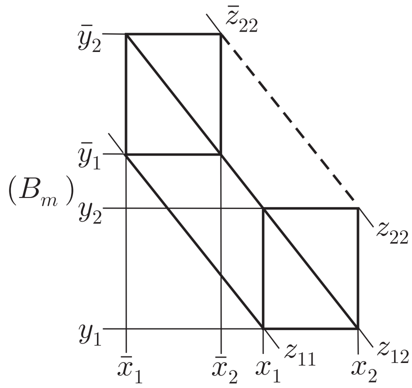

Рис. 4

На рис. 1-4 изображены основные типы конфигураций: R — конфигурация Рейдемейстера, B_l — левая конфигурация Бола, B_r — правая конфигурация Бола, B_m — средняя конфигурация Бола. На этих и всех последующих рисунках слои первого, второго и третьего слоений ткани изображаются соответственно вертикальными, горизонтальными и наклонными линиями. Опишем построение конфигурации Рейдемейстера R, которая нам понадобится в дальнейшем.

В области $\mathcal{N}$ многообразия $\mathcal{M}$, несущего три-ткань $W(r,r,r)$, зафиксируем два достаточно близких вертикальных слоя x_1, x_2 и два также достаточно близких горизонтальных слоя y_1, y_2, см. рис. 1. Здесь и далее мы обозначаем слои ткани и определяющие их параметры одними и теми же символами. Через точку пересечения слоев x_i и y_j проходит единственный наклонный слой с параметром z_{ij}, $z_{ij} = x_i \cdot y_j = f(x_i, y_j)$, $i, j = 1, 2$. Пусть $\bar{x}_1$ – еще один произвольный вертикальный слой, достаточно близкий к слою x_1. Через точку пересечения слоев $\bar{x}_1$ и z_{1i} проходит единственный горизонтальный слой $\bar{y}_i$, так что $z_{1i} = \bar{x}_1 \cdot \bar{y}_i$. Слой $\bar{y}_1$ пересекает наклонный слой z_{21} в некоторой точке, а через нее проходит единственный вертикальный слой $\bar{x}_2$, при этом $z_{21} = \bar{x}_2 \cdot \bar{y}_1$. Далее, через точку $\bar{x}_2 \cap \bar{y}_2$ проходит наклонный слой $\bar{z}_{22} = \bar{x}_2 \cdot \bar{y}_2$. Последний, вообще говоря, не совпадает с построенным выше слоем z_{22}, что отмечено на рис. 1 пунктиром. Таким образом, конфигурация R построена. Она образована произвольными достаточно близкими вертикальными слоями x_i, $\bar{x}_i$, горизонтальными слоями y_j, $\bar{y}_j$ и наклонными слоями $z_{ij} = x_i \cdot y_j$, $i, j = 1, 2$, и $\bar{z}_{22} = \bar{x}_2 \cdot \bar{y}_2$.

Если $z_{22} = \bar{z}_{22}$, то говорят, что конфигурация Рейдемейстера замыкается. Три-ткань $W(r,r,r)$ называется тканью Рейдемейстера, если на ней замыкаются все достаточно малые конфигурации Рейдемейстера [2]. Согласно [8] условие замыкания конфигураций R можно записать в виде так называемого условного тождества:

$$\left.\begin{array}{r} x_1 \cdot y_1 = \bar{x}_1 \cdot \bar{y}_1, \\ x_1 \cdot y_2 = \bar{x}_1 \cdot \bar{y}_2, \\ x_2 \cdot y_1 = \bar{x}_2 \cdot \bar{y}_1 \end{array}\right\} \Longrightarrow x_2 \cdot y_2 = \bar{x}_2 \cdot \bar{y}_2.$$

Аналогичным образом определяются и конфигурации Бола, см. рис. 2-4. Ткани, на которых указанные конфигурации являются замкнутыми, называются тканями Бола (левыми или (B_l), правыми или (B_r) и средними или (B_m)). Ткани, на которых замыкаются фигуры Бола всех трех типов, называются тканями Муфанг (M).

Условию замыкания конфигураций определенного вида на три-ткани соответствует некоторое тождество, выполняемое в так называемых координатных лупах ткани. Операция ($\circ$) в координатной лупе $\ell_{(a,b)}(\circ)$, где a и b — фиксированные слои, $a \in \lambda_1$, $b \in \lambda_2$, определяется на третьем слоении λ_3 ткани следующим образом (рис. 5):

$$(\circ) : \lambda_3 \times \lambda_3 \to \lambda_3, \quad u \circ v =^{-1} f(u,b) \cdot f^{-1}(a,v).$$

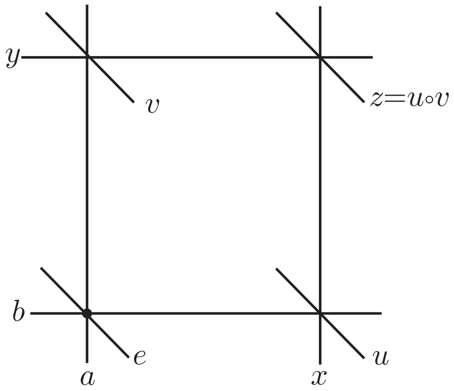

Рис. 5

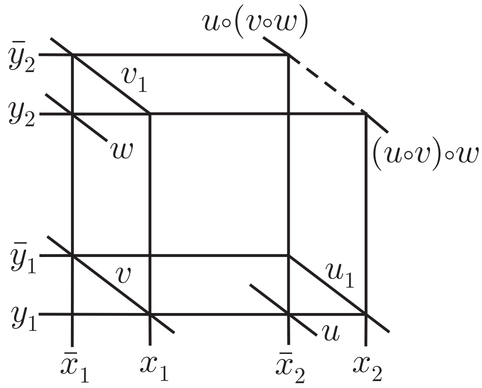

Рис. 6

Здесь u и v — произвольные слои третьего слоения λ_3, достаточно близкие к слою $e = a \cdot b$, который, как нетрудно проверить по определению, является единичным элементом лупы $\ell_{(a,b)}(\circ)$, то есть $u \circ e = u$, $e \circ v = v$.

Соответствие между условиями замыкания конфигураций Рейдемейстера и Бола и тождествами в их координатных лупах приведено в Таблице 1. Здесь через "\"и "/"обозначены, соответственно, левая и правая обратные операции для операции $(\circ)$.

Таблица 1

Ткань	Тождество	Тензорная характеристика
R	$(u \circ v) \circ w = u \circ (v \circ w)$	$b^i_{jkl} = 0$
B_l	$(u \circ u) \circ v = u \circ (u \circ v)$	$b^i_{(jk)l} = 0$
B_r	$u \circ (v \circ v) = (u \circ v) \circ v$	$b^i_{(j\|k\|l)} = 0$
B_m	$u \circ (v \setminus u) = (u/v) \circ u$	$b^i_{j(kl)} = 0$

На рис. 6 проиллюстрировано доказательство для условия замыкания (R). Здесь $u,\ v,\ w$ — произвольные слои из λ_3, $u_1 = u \circ v$, $v_1 = v \circ w$.

Перечисленные выше понятия и результаты, возникшие первоначально в теории криволинейных три-тканей, были обобщены М.А. Акивисом для многомерных три-тканей $W(r,r,r)$ [2]. Он же записал структурные уравнения ткани $W(r,r,r)$ в терминах внешнего дифференциального исчисления [2]:

$$d\underset{1}{\omega}^i = \underset{1}{\omega}^j \wedge \omega^i_j + a^i_{jk} \underset{1}{\omega}^j \wedge \underset{1}{\omega}^k, \quad d\underset{2}{\omega}^i = \underset{2}{\omega}^j \wedge \omega^i_j - a^i_{jk} \underset{2}{\omega}^j \wedge \underset{2}{\omega}^k,$$
$$d\omega^i_j = \omega^k_j \wedge \omega^i_k + b^i_{jkl} \underset{1}{\omega}^k \wedge \underset{2}{\omega}^l,$$

$i, j, k, l, ... = \overline{1, r}$. Здесь величины a^i_{jk} и b^i_{jkl} являются тензорами и называются соответственно тензорами кручения и кривизны три-ткани. Поля тензоров a^i_{jk} и b^i_{jkl} определяют три-ткань с точностью до эквивалентности [7]. Слоения λ_1, λ_2 и λ_3 ткани $W(r, r, r)$ задаются соответственно уравнениями

$$\lambda_1 : \underset{1}{\omega^i} = 0, \quad \lambda_2 : \underset{2}{\omega^i} = 0, \quad \lambda_3 : \underset{1}{\omega^i} + \underset{2}{\omega^i} = 0.$$

С помощью структурных уравнений ткани можно описывать ее дифференциально-геометрические свойства в терминах канонической аффинной связности, введенной Черном в [25], где он нашел также тензорные характеристики некоторых многомерных три-тканей (тензорные характеристики три-тканей Рейдемейстера и Бола приведены в Таблице 1). Перечисленные классы тканей описаны также в терминах касательной W-алгебры (алгебры Акивиса) [3], [24], обобщающей понятие алгебры Ли группы Ли. По заданным W-алгебрам путем интегрирования соответствующих структурных уравнений были найдены многочисленные примеры три-тканей различных классов: Муфанг, Бола, шестиугольные и т.д. Этот метод впервые применен Акивисом в работе [4] для нахождения конечных уравнений ткани Муфанг минимальной размерности.

С тканями Бола связано понятие сердцевины, введенное В.Д. Белоусовым [8]. В силу замыкания конфигурации B_m (рис. 4) положение слоя z_{22} не зависит от выбора вертикального слоя x_1 и определяется только слоями z_{11} и z_{12}, то есть $z_{22} = \mathcal{C}(z_{11}, z_{12})$. При этом функция $\mathcal{C}$ определяется так: $z_{22} = z_{12} \circ (z_{11}/z_{12})$ [8]. Согласно [21], сердцевина $\mathcal{C}$ индуцирует на базе третьего слоения ткани B_m локально симметрическую структуру, определяемую локальными симметриями $s_{z_{12}} : s_{z_{12}}(z_{11}) = \mathcal{C}(z_{11}, z_{12})$. Свойства этой структуры исследовались в [23], см. также [7].

Отдельные дифференциально-геометрические свойства многомерных (p, q, r)-тканей, образованных слоениями разных размерностей, изучались многими авторами, обзор результатов и библиографию см. в [9] и в работе автора [6]. Однако в теории три-тканей $W(p, q, r)$, как уже было сказано, оставался существенный пробел — отсутствие понятий, аналогичных понятиям координатной лупы, конфигурации, тождества и т.д., не позволяло получить результаты, связывающие, как и в классическом случае, алгебраические и геометрические свойства (p, q, r)-тканей. Отсюда вытекают **основные задачи исследования**.

1. Обобщить для три-тканей $W(p,q,r)$, образованных слоениями разных размерностей, основные понятия классической теории три-тканей, образованных слоениями одинаковой размерности (изотопия, координатная лупа, конфигурации Рейдемейстера и Бола, сердцевина и т.д.).

2. Найти алгебраические условия (тождества), эквивалентные замыканию на три-тканях $W(p,q,r)$ обобщенных конфигураций Рейдемейстера и Бола.

3. Исследовать свойства обобщенных три-тканей Рейдемейстера и Бола.

4. Исследовать геометрические и алгебраические объекты, связанные с три-тканью $W(p,q,r)$.

5. Найти структурные уравнения и исследовать свойства три-тканей, порождаемых локальными гладкими группами Ли преобразований и гладкими квазигруппами Бола преобразований.

Научная новизна. Все результаты работы, выносимые на защиту, являются новыми. На защиту выносятся следующие результаты.

1. Для тканей $W(p,q,p+q-1)$, $p \leq q$, определены понятия координатного моноида, обобщенной конфигурации Рейдемейстера и сердцевины. Доказано, что координатный группоид ткани $W(p,q,p+q-1)$, на которой замыкаются обобщенные конфигурации Рейдемейстера (ткани $WR(p,q)$), вполне определяется ее сердцевиной (Теорема 2), а существование сердцевины является характеристическим свойством три-тканей $WR(p,q)$ (Теорема 3). Найдено тождество обобщенной ассоциативности, выполнение которого в каждом координатном моноиде три-ткани $W(p,q,p+q-1)$ эквивалентно замыканию на этой ткани обобщенных конфигураций Рейдемейстера (Теорема 4).

2. Показано, что три-ткань $W(p,q,p+q-1)$ индуцирует на своих вертикальных и горизонтальных слоях соответственно $(p+1)$-ткани и $(q+1)$-ткани, образованные слоениями одинаковой размерности. Для каждой из этих тканей построено некоторое семейство отображений. Доказано, что это семейство образует группу автоморфизмов соответствующей ткани в том и только том случае, если на ткани $W(p,q,p+q-1)$ замыкаются обобщенные конфигурации Рейдемейстера (Теоремы 7 и 8). Доказано, что $(p+1)$-ткани и $(q+1)$-ткани, индуцируемые три-тканью $WR(p,q)$, параллелизуемы (Теоремы 9 и 10).

3. Найдены структурные уравнения три-ткани $WR(p,q)$ (Теорема 14). Путем интегрирования последних найдены конечные уравнения тканей $WR(p,q)$ (Таблица 2).

4. Для тканей $W(p,q,r)$, $p \leq q \leq r$, определено понятие координатного моноида и доказано, что он существует только для тканей вида $W(\lambda l, \lambda m, \lambda(l+m-1))$ (Теорема 15). Для тканей $W(\lambda l, \lambda m, \lambda(l+m-1))$ определены понятия обобщенной конфигурации Рейдемейстера и сердцевины. Найдено тождество обобщенной ассоциативности, выполнение которого в каждом координатном моноиде три-ткани $W(\lambda l, \lambda m, \lambda(l+m-1))$ эквивалентно замыканию на этой ткани обобщенных конфигураций Рейдемейстера (Теорема 18).

5. Доказано, что ткань $GW(p,q,q)$, порождаемая действием локальной гладкой q-параметрической группы Ли G на гладком p-мерном многообразии, характеризуется замыканием на ткани некоторых обобщенных конфигураций Рейдемейстера (Теорема 21). Доказано, что сердцевина ткани $GW(p,q,q)$ может быть записана в виде равенства инвариантов группы преобразований (Теорема 22). Найдены структурные уравнения три-ткани $GW(p,q,q)$ по уравнениям Маурера-Картана группы G.

6. Для ткани $W(p,q,q)$ определено понятие обобщенной левой конфигурации Бола. Доказано, что на три-ткани $B_l(p,q,q)$, порождаемой локальной гладкой квазигруппой Бола преобразований (и только на такой ткани), замыкаются обобщенные левые конфигурации Бола (Теорема 28). В координатных моноидах три-ткани Бола $B_l(p,mp,mp)$ (для других размерностей моноид не существует) найдено тождество обобщенной альтернативности, соответствующее замыканию на этой ткани обобщенных левых конфигураций Бола (Теорема 29). Найдены структурные уравнения три-ткани Бола $B_l(p,q,q)$ (Теорема 32). Путем интегрирования соответствующих структурных уравнений найдены конечные уравнения некоторой ткани $B_l(2,3,3)$, тензор кривизны которой имеет единственную ненулевую компоненту.

Методы исследования. Теория тканей тесно связана со многими областями современной математики (внешним дифференциальным исчислением, теорией связностей, теорией расслоенных пространств, классической и проективной геометрией, алгебраической теорией групп, теорией групп Ли и т.д.), а потому в ней используются разнообразные методы, применяемые в этих областях. Наиболее эффективно используется метод внешних форм и подвижного репера Картана, развитый в работах российских математиков С.П. Финикова, Г.Ф. Лаптева, А.М. Васильева и с успехом примененный М.А. Акивисом в теории многомерных три-тканей. Этот метод используется и в настоящей работе. Все рассмотрения имеют локальный характер.

Теоретическое и прикладное значение. Результаты, полученные в диссертации, носят теоретический характер. Они могут быть использованы специалистами-математиками и физиками в дальнейших исследованиях гладких группоидов общего вида $z = f(x, y)$ и определяемых ими алгебраических и геометрических структур, а также неассоциативных алгебр и их физических приложений. Эти результаты позволяют по-новому оценить многие факты из классической теории тканей. Они применяются при чтении спецкурсов в Тверском госуниверситете, Московском государственном педагогическом университете, Орском педагогическом институте и других.

Апробация работы. Основные результаты диссертации были доложены на следующих семинарах и конференциях:
— на международной сессии геометрического семинара МГУ и РАН им. Г.Ф. Лаптева (Лаптевские чтения —2001, Москва, июнь 2001 г.);
— на 8-ой международной конференции по дифференциальной геометрии и ее приложениям в математическом институте Силезского университета (Опава, Чехия, август 2001 г.);
— на семинаре по геометрии и анализу в Институте математики им. С.Л. Соболева СО РАН (Новосибирск, декабрь 2001 г.);
— на международном семинаре по геометрии и анализу памяти Н.Ф. Ефимова в Ростовском госуниверситете (сентябрь 2002 г.);
— на международном семинаре им. Н.И. Лобачевского в Казанском госуниверситете (ноябрь 2002 г.),
— на международной конференции по геометрии "$Loops-2003$"(Прага, Чехия, август 2003 г.);
— на семинаре по геометрии в Московском городском педагогическом университете (сентябрь 2004 г.);
— на семинаре "Дифференциальная геометрия и приложения"в МГУ им. М.В. Ломоносова, рук. А.Т. Фоменко (апрель, декабрь 2005 г.);
— на семинаре "Группы Ли и теория инвариантов"в МГУ им. М.В. Ломоносова, рук. Э.Б. Винберг, А.Л. Онищик (апрель 2005 г.);
— на геометрическом семинаре в Московском педагогическом государственном университете, рук. В.Ф. Кириченко (апрель 2005 г.);
— на международной сессии геометрического семинара МГУ и РАН им. Г.Ф. Лаптева (Лаптевские чтения —2006, Москва, июль 2006 г.).

По теме диссертации автором опубликовано 14 работ.

Структура диссертации. Диссертация изложена на 256 страницах, состоит из введения, шести глав и списка литературы, содержащего 109 наименований. Нумерация параграфов производится двумя символами, а нумерация пунктов — тремя. Например, номером 3.2 обозначен второй параграф третьей главы, а номером 5.2.1 — первый пункт второго параграфа пятой главы. Нумерация рисунков и теорем в тексте диссертации сквозная, а нумерация формул в каждой главе своя.

2 Обзор содержания диссертации

Во введении дается общая характеристика работы, формулируются основные результаты, приводится краткий исторический обзор результатов классической теории три-тканей, образованных слоениями *одинаковой* размерности, которые могут быть обобщены для три-тканей, образованных слоениями *разной* размерности.

В первой главе вводятся основные понятия для ткани $W(p,q,p+q-1)$, образованной на многообразии $\mathcal{M}$ размерности $p+q$ тремя слоениями размерностей p, q и $p+q-1$.

В п. 1.1 приводится определение три-ткани $W(p,q,r)$ общего вида и детализируется понятие изотопии применительно к таким тканям.

В п. 1.2 вводится понятие координатного моноида $\mu_{(a,b)}(\circ)$ три-ткани $W(p,q,p+q-1)$, аналогичное понятию координатной лупы $\ell_{(a,b)}(\circ)$ ткани $W(r,r,r)$. Операция $(\circ)$ в координатном моноиде определяется с помощью координатной решетки, которая образована в некоторой области $\mathcal{N}\subset\mathcal{M}$ фиксированным набором $a=(a_1,...,a_p)$ из p достаточно близких вертикальных слоев первого слоения и фиксированным набором $b=(b_1,...,b_q)$ из q также достаточно близких горизонтальных слоев второго слоения, см. рис. 7.

Операция $(\circ)$ определена (как и координатная лупа $\ell_{(a,b)}(\circ)$ ткани $W(r,r,r)$) на третьем слоении λ_3 ткани $W(p,q,p+q-1)$ равенством

$$z=u\circ v=R_b^{-1}(u)\cdot L_a^{-1}(v)$$

и показана на рис. 7. Здесь M — произвольная точка области $\mathcal{N}$, а x, y и z соответственно вертикальный, горизонтальный и наклонный слои, проходящие через эту точку, так что $z=x\cdot y$. Наклонный слой, проходящий через точку $B_i=x\cap b_i$, обозначен u_i, $i=\overline{1,q}$; наклонный слой, проходящий через точку $A_\alpha=y\cap a_\alpha$, обозначен v_α, $\alpha=\overline{1,p}$, и по определению ткани $W(p,q,p+q-1)$ имеем

$$u_i = x \cdot b_i, \quad v_\alpha = a_\alpha \cdot y.$$

Таким образом, в области $\mathcal{N}$ возникают два отображения (они обозначены соответственно R_b и L_a)

$$R_b : x \to (u_1, ..., u_q); \quad L_a : y \to (v_1, ..., v_p).$$

Эти отображения записаны в виде

$$u = R_b(x), \quad v = L_a(y),$$

где обозначено $u = (u_1, ..., u_q)$, $v = (v_1, ..., v_p)$. При условиях

$$\mid \frac{\partial f(x, b_i)}{\partial x^j} \mid \neq 0, \quad \mid \frac{\partial f(a_\alpha, y)}{\partial y^\beta} \mid \neq 0$$

отображения R_b и L_a являются локально биективными и на третьем слоении определены обратные функции R_b^{-1} и L_a^{-1},

$$x = R_b^{-1}(u), \quad y = L_a^{-1}(v).$$

Здесь x — вертикальный слой, трансверсальный подмногообразиям $U_i = u_i \cap b_i$ размерности $q-1$; а y — горизонтальный слой, трансверсальный подмногообразиям $V_\alpha = v_\alpha \cap a_\alpha$ размерности $p-1$, см. рис. 7.

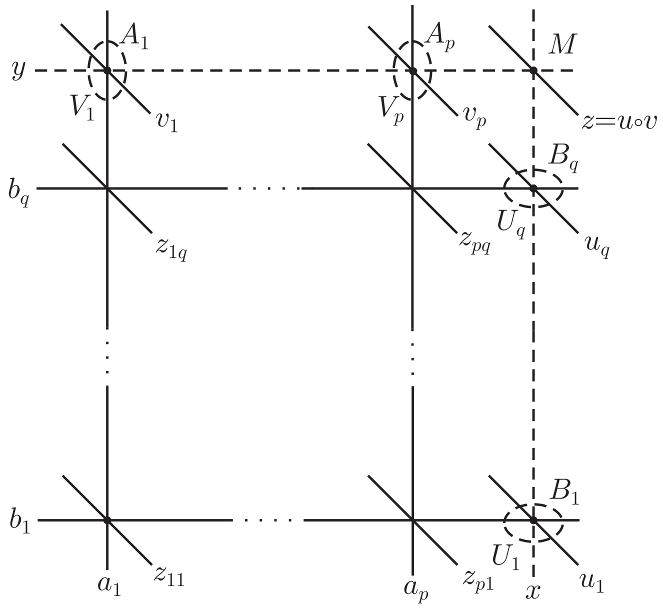

Рис. 7

Локальные биекции R_b и L_a, с одной стороны, определяют замену параметров $x = (x^1, ..., x^q) \to (u_1, ..., u_q)$ и $y = (y^1, ..., y^p) \to (v_1, ..., v_p)$ на базах X и Y соответственно первого λ_1 и второго λ_2 слоений три-ткани $W(p, q, p{+}q{-}1)$, а с другой, задают изотопическое преобразование (R_b, L_a, id) координатного группоида $z = x \cdot y$ ткани $W(p, q, p + q - 1)$ в ее координатный моноид $z = u \circ v$, см. Теорему 1.

Единичным элементом e координатного моноида $\mu_{(a,b)}(\circ)$ названа матрица $e = (z_{\alpha i})$, где $z_{\alpha i} = a_\alpha \cdot b_i$. Показано, что набор столбцов $\hat{e}_\alpha = (z_{\alpha 1}, ..., z_{\alpha q})$ матрицы e можно считать аналогом левой единицы, а набор ее строк $\check{e}_i = (z_{1i}, ..., z_{pi})$ — аналогом правой единицы, так как $\hat{e}_\alpha \circ v = v_\alpha$, $u \circ \check{e}_i = u_i$. В отличие от классического случая, "правая единица"и "левая единица"координатного моноида $\mu_{(a,b)}(\circ)$, вообще говоря, не совпадают.

В п. 1.3 вводится понятие обобщенной конфигурации Рейдемейстера для три-ткани $W(p, q, p + q - 1)$. Приведем это определение.

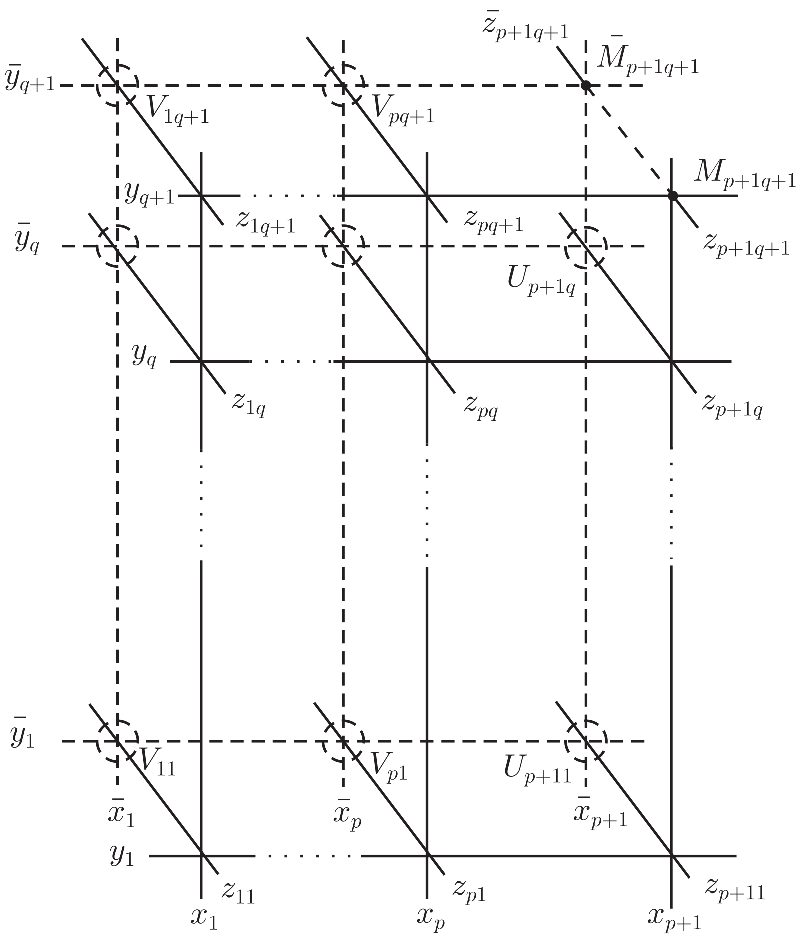

Рис. 8

В области $\mathcal{N}$ многообразия $\mathcal{M}$, несущего три-ткань $W(p, q, p{+}q{-}1)$, зафиксируем $p + 1$ достаточно близких вертикальных слоев $x_{\bar{\alpha}}$,

$\bar{\alpha} = \overline{1, p+1}$, и $q+1$ также достаточно близких горизонтальных слоев $y_{\bar{i}}$, $\bar{i} = \overline{1, q+1}$, см. рис. 8. Через точку пересечения слоев $x_{\bar{\alpha}}$ и $y_{\bar{i}}$ проходит слой третьего слоения с параметром $z_{\bar{\alpha}\bar{i}}$, $z_{\bar{\alpha}\bar{i}} = x_{\bar{\alpha}} \cdot y_{\bar{i}}$. Точку пересечения слоев x_{p+1} и y_{q+1} обозначим через M_{p+1q+1}. Построенная конфигурация изображена на рис. 8 сплошными линиями.

Рассмотрим еще p произвольных вертикальных слоев $\bar{x}_{\alpha}$. Эти слои, а также подмногообразия $V_{\alpha\bar{i}} = \bar{x}_{\alpha} \cap z_{\alpha\bar{i}}$ обозначены на рис. 8 пунктирными линиями. Для каждого фиксированного $\bar{i}$ p подмногообразий $V_{\alpha\bar{i}}$, $\alpha = \overline{1, p}$, допускают (локально!) единственный трансверсальный горизонтальный слой $\bar{y}_{\bar{i}}$, так что $z_{\alpha\bar{i}} = \bar{x}_{\alpha} \cdot \bar{y}_{\bar{i}}$. Каждый из слоев $\bar{y}_i$ пересекает наклонный слой с соответствующим номером z_{p+1i} по некоторому $(q-1)$-мерному подмногообразию U_{p+1i}. Эти подмногообразия допускают (локально!) единственный трансверсальный вертикальный слой $\bar{x}_{p+1}$, который пересекается с построенным выше горизонтальным слоем $\bar{y}_{q+1}$ в точке $\bar{M}_{p+1q+1}$. Эта точка, вообще говоря, не лежит на слое z_{p+1q+1}, проходящем через точку M_{p+1q+1}.

При $p = q = 1$ построенная конфигурация совпадает с конфигурацией Рейдемейстера R для криволинейной три-ткани на плоскости (см. рис. 1), поэтому она названа обобщенной конфигурацией Рейдемейстера и обозначена $R(p,q)$. Если точки M_{p+1q+1} и $\bar{M}_{p+1q+1}$ лежат на одном наклонном слое z_{p+1q+1}, то будем говорить, что конфигурация $R(p,q)$ замыкается. Ткань $W(p,q,p+q-1)$, на которой замыкаются все достаточно малые конфигурации $R(p,q)$, названа обобщенной тканью Рейдемейстера и обозначена $WR(p,q)$. По аналогии с классической теорией (см. [8]) условие замыкания конфигураций $R(p,q)$ можно записать в виде

$$\left.\begin{aligned} x_{\alpha} \cdot y_i &= \bar{x}_{\alpha} \cdot \bar{y}_i, \\ x_{\alpha} \cdot y_{q+1} &= \bar{x}_{\alpha} \cdot \bar{y}_{q+1}, \\ x_{p+1} \cdot y_i &= \bar{x}_{p+1} \cdot \bar{y}_i \end{aligned}\right\} \Longrightarrow x_{p+1} \cdot y_{q+1} = \bar{x}_{p+1} \cdot \bar{y}_{q+1}.$$

С замыканием конфигураций $R(p,q)$ связываются в дальнейшем различные свойства тканей $W(p,q,p+q-1)$.

В п. 1.4 определено понятие сердцевины произвольной три-ткани Рейдемейстера R и ткани $WR(p,q)$, обобщающее аналогичное понятие в теории тканей Бола B_m [8]. Сердцевина классической ткани R определена на третьем слоении ткани как тернарная операция $z_{22} = z_{21} \circ (z_{11}/z_{12})$, где z_{11}, z_{12}, z_{21}, z_{22} — параметры наклонных слоев, входящих в произвольную конфигурацию R (рис. 1). Сердцевина ткани $WR(p,q)$ представляет собой $(pq+p+q)$-арную операцию на третьем слоении этой ткани и связывает параметры наклонных слоев, входящих в произвольную конфигурацию $R(p, q)$:

$$z_{p+1q+1} = \mathcal{C}(z_{\alpha i}, z_{\alpha q+1}, z_{p+1i}),$$

$\alpha = \overline{1, p}$, $i = \overline{1, q}$. Доказаны следующие теоремы.

Теорема 2 *Сердцевина $\mathcal{C}$ три-ткани $WR(p, q)$ вполне определяет координатный группоид этой ткани.*

Теорема 3 *Сердцевина ткани $W(p, q, p+q-1)$ существует тогда и только тогда, когда эта ткань является тканью $WR(p, q)$.*

В п. 1.4.2 описана взаимосвязь введенных выше понятий и некоторых понятий теории физических структур Ю.И. Кулакова [17], [19]. Показано, что координатный группоид ткани $WR(p, q)$ (и только такой ткани) определяет бинарную физическую структуру ранга $(p+1, q+1)$, а понятие сердцевины ткани $WR(p, q)$ аналогично понятию феноменологически инвариантной формы физического закона (в теории физических структур).

Как уже было сказано, координатные лупы классической три-ткани Рейдемейстера R являются группами [2], то есть в них выполняется тождество ассоциативности $(u \circ v) \circ w = u \circ (v \circ w)$. В п. 1.5 найдено тождество в координатных моноидах три-ткани $WR(p, q)$, соответствующее замыканию на этой ткани обобщенных конфигураций Рейдемейстера $R(p, q)$. Доказана

Теорема 4 *Пусть $u = (u_1, u_2, ..., u_q)$ и $w = (w_1, w_2, ..., w_p)$ — два произвольных набора наклонных слоев три-ткани $W(p, q, p+q-1)$ и $v_{\alpha i}$ — еще один набор pq наклонных слоев, $\alpha = \overline{1, p}$, $i = \overline{1, q}$. Обозначим строки и столбцы матрицы $(v_{\alpha i})$ следующим образом:*
$v_i^{(p)} = (v_{1i}, ..., v_{pi})$, $v_\alpha^{(q)} = (v_{\alpha 1}, ..., v_{\alpha q})$. Три-ткань $W(p, q, p+q-1)$ будет тканью $WR(p, q)$ тогда и только тогда, когда в каждом ее координатном моноиде $\mu_{(a,b)}(\circ)$ выполняется следующее тождество

$$u \circ (v_1^{(q)} \circ w, ..., v_p^{(q)} \circ w) = (u \circ v_1^{(p)}, ..., u \circ v_q^{(p)}) \circ w.$$

При $p = q = 1$ это тождество обращается в обычное тождество ассоциативности, поэтому оно названо тождеством обобщенной ассоциативности. Координатный моноид $\mu_{(a,b)}(\circ)$ три-ткани $W(p, q, p+q-1)$, в котором выполняется тождество обобщенной ассоциативности, также назван ассоциативным.

Во второй главе изучаются свойства некоторых новых тканей, индуцируемых тканью $W(p,q,p+q-1)$, но образованных уже слоениями одинаковой размерности. В п. 2.1.1 показано, что при $p>1$ и $q>1$ на вертикальных и горизонтальных слоях ткани $W(p,q,p+q-1)$ возникают так называемые $(p+1)$-ткани и $(q+1)$-ткани (в смысле В.В. Гольдберга [14]), они обозначены $\tilde{W}(a,x)$ и $\tilde{W}(b,y)$. Эти ткани получаются следующим образом. Пусть $a=(a_\alpha)$ и $b=(b_i)$ — некоторая координатная решетка ткани $W(p,q,p+q-1)$, x и y — произвольные вертикальный и горизонтальный слои этой ткани. Наклонные слои ткани $W(p,q,p+q-1)$ высекают на горизонтальных слоях $b_1,\ldots,\ b_q$ и y семейства $(q-1)$-мерных подмногообразий. Проектируя последние вертикальными слоями на слой y, получаем на нем $(q+1)$-ткань $\tilde{W}(b,y)$, см. рис. 9.

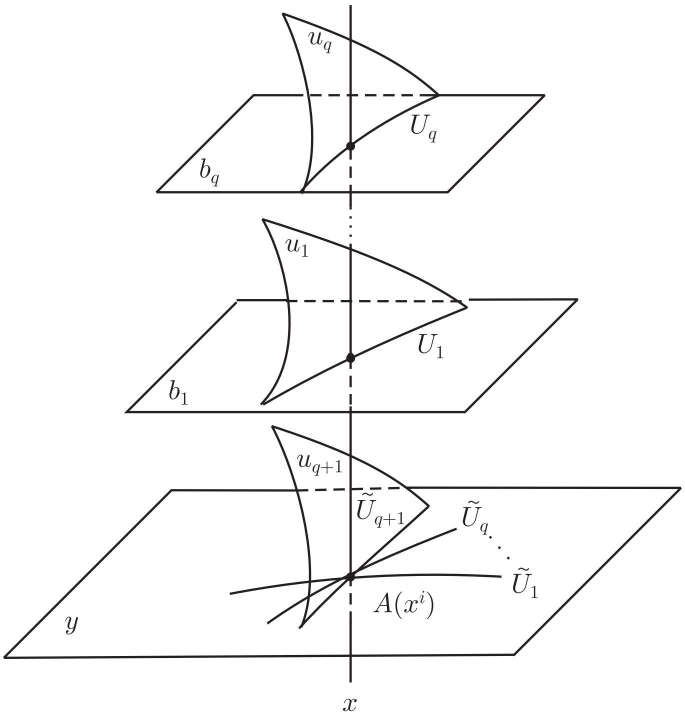

Рис. 9

Аналогично, набор (a_α,x) порождает на слое x некоторую $(p+1)$-ткань $\tilde{W}(a,x)$. Заметим, что в классической теории ткани $\tilde{W}(a,x)$ и $\tilde{W}(b,y)$ не возникают.

В п. 2.1.2 показано, что уравнения тканей $\tilde{W}(a,x)$ и $\tilde{W}(b,y)$ можно записать соответственно в виде

$$\tilde{W}(a,x): \quad v_{p+1} = x \cdot L_a^{-1}(v_1, ..., v_p);$$
$$\tilde{W}(b,y): \quad u_{q+1} = R_b^{-1}(u_1, ..., u_q) \cdot y.$$

Далее исследованы свойства тканей $\tilde{W}(a,x)$ и $\tilde{W}(b,y)$, связанные с замыканием на ткани $W(p,q,p+q-1)$ конфигураций $R(p,q)$. Для этого на слоях $x = \mathcal{F}_1^0$ и $y = \mathcal{F}_2^0$, несущих соответственно ткани $\tilde{W}(a,x)$ и $\tilde{W}(b,y)$, определены некоторые отображения

$$\tilde{\phi}_1 : \mathcal{F}_1^0 \to \mathcal{F}_1^0, \quad \tilde{\phi}_2 : \mathcal{F}_2^0 \to \mathcal{F}_2^0,$$

см. п. 2.2.1. Отображение $\tilde{\phi}_2$ показано на рис. 10. Здесь $a = (a_1, ..., a_p)$, $b = (b_1, ..., b_q)$ — координатная решетка, a_{p+1} — фиксированный вертикальный слой, отличный от слоев a_α; $z_{\alpha i} = a_\alpha \cdot b_i$, $u_i = a_{p+1} \cdot b_i$; A — произвольная точка на $\mathcal{F}_2^0$, x — проходящий через A вертикальный слой, $\bar{V}_{1i} = x \cap z_{1i}$ — подмногообразия размерности $p-1$, y_i — горизонтальный слой, трансверсальный подмногообразиям $\bar{V}_{1i}, V_{2i}, ..., V_{pi}$; $\bar{U}_i = u_i \cap y_i$ — подмногообразия размерности $q-1$, $\tilde{x}$ — вертикальный слой, трансверсальный подмногообразиям $\bar{U}_1, ..., \bar{U}_q$, точка $\tilde{A} = \tilde{x} \cap \mathcal{F}_2^0$ есть образ точки A при отображении $\tilde{\phi}_2$, $\tilde{A} = \tilde{\phi}_2(A)$.

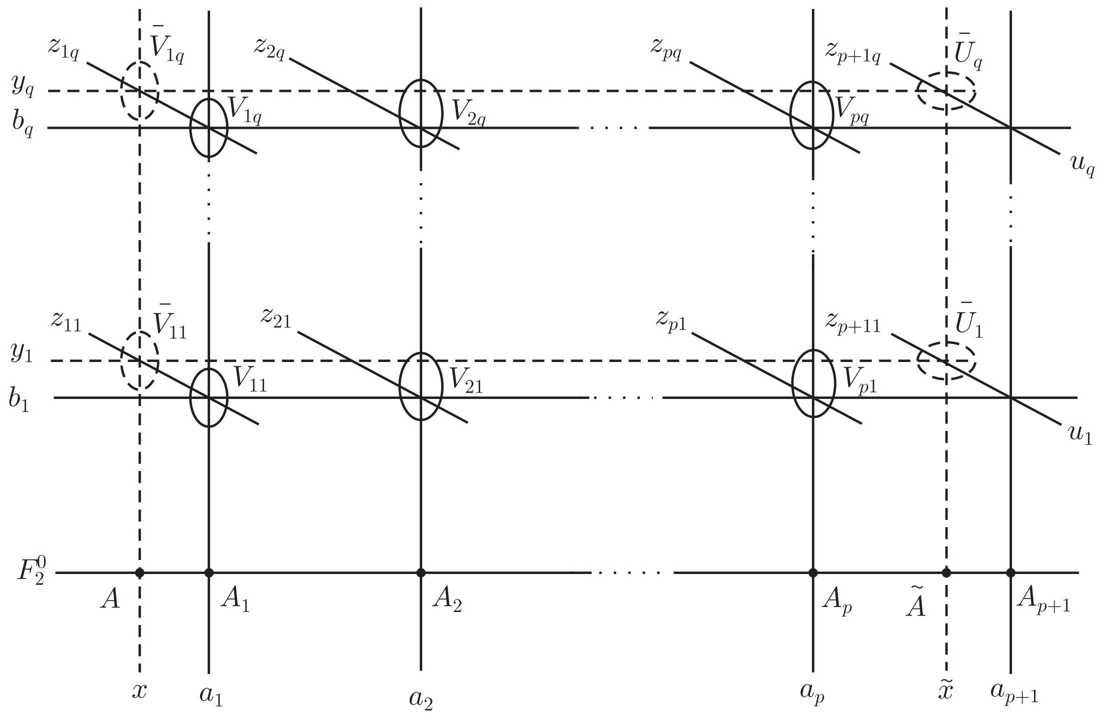

Рис. 10

Отображение $\tilde{\phi}_1 : \mathcal{F}_1^0 \to \mathcal{F}_1^0$ определяется аналогичным образом. В п. 2.2.2 доказана

Теорема 5 *Каждое отображение $\tilde{\phi}_2$, определенное на горизонтальном слое y ткани $W(p,q,p+q-1)$, является автоморфизмом соответствующей ткани $\tilde{W}(b,y)$, индуцированной на этом же слое, тогда и только тогда, когда ткань $W(p,q,p+q-1)$ является тканью $WR(p,q)$.*

Аналогичное утверждение верно и для отображений $\tilde{\phi}_1$ (Теорема 6).

В п. 2.3.2 доказана

Теорема 7 *Автоморфизмы $\tilde{\phi}_2$ ткани $\tilde{W}(b,y)$, индуцируемой тканью $WR(p,q)$ на ее произвольном горизонтальном слое y, образуют группу, транзитивно действующую на этом слое.*

Аналогичное утверждение справедливо для автоморфизмов $\tilde{\phi}_1$ ткани $\tilde{W}(a,x)$ (Теорема 8).

С помощью автоморфизмов $\tilde{\phi}_1$ и $\tilde{\phi}_2$ в п. 2.3.1 определен локальный диффеоморфизм (ϕ_1,ϕ_2) многообразия $\mathcal{M}$, несущего три-ткань $WR(p,q)$, на себя.

Среди $(n+1)$-тканей наиболее простой класс образуют так называемые параллелизуемые ткани. $(n+1)$-ткань называется параллелизуемой, если она эквивалентна ткани, образованной $(n+1)$ слоениями $(n-1)$-мерных параллельных плоскостей [14]. Согласно [14], параллелизуемая $(n+1)$-ткань характеризуется тем, что любая ее три-подткань параллелизуема. В п. 2.4 доказана

Теорема 9 *$(q+1)$-ткань $\tilde{W}(b,y)$, порождаемая три-тканью $WR(p,q)$ на ее произвольном горизонтальном q-мерном слое y, параллелизуема.*

Для тканей $\tilde{W}(a,x)$ справедлива аналогичная Теорема 10.

При $p=1$, то есть на три-ткани $W(1,q,q)$, ткани $\tilde{W}(a,x)$ не существуют, поскольку вертикальные слои одномерные. Поэтому случай $p=1$ рассмотрен отдельно в п. 2.5. Доказана

Теорема 11 *Отображения $\tilde{\phi}_1$ на произвольном вертикальном слое ткани $WR(1,q)$ (и только такой ткани) образуют q-параметрическую группу, транзитивно действующую на этом слое, и определяются координатным группоидом этой ткани.*

Этот факт позволяет найти все ткани $WR(1,q)$, порождаемые действием группы Ли на одномерном слое. Поскольку (см., например, [15]) существуют всего три одномерные группы Ли преобразований (однопараметрическая (параллельных переносов), двухпараметрическая (аффинная) и трехпараметрическая (проективная)), то, соответственно, и тканей $WR(1,q)$ имеется только три типа:

$$WR(1,1): z = x+y; \quad WR(1,2): z = x^1y^1+x^2; \quad WR(1,3): z = \frac{x^1y^1+x^2}{y^1+x^3}.$$

Физические структуры ранга (2,2), (2,3) и (2,4), соответствующие эти тканям, получены Г.Г. Михайличенко в [19].

В п. 2.7 показано, что в последнем случае соответствующая ткань $\tilde{W}(b,y)$ есть одна из тканей, рассмотренных В. Бляшке в [10]:

$$h_1(u_1u_2+u_3u_4)+h_2(u_1u_3+u_4u_2)+h_3(u_1u_4+u_2u_3)=0,$$

(здесь u_1, u_2, u_3, u_4 — параметры слоев ткани, а h_1, h_2, h_3 — постоянные величины, связанные соотношением $h_1+h_2+h_3=0$). Доказано, что эта 4-ткань порождается в трехмерном проективном пространстве P^3 четырьмя пучками плоскостей, оси которых попарно скрещиваются и принадлежат одной квадрике (Теорема 12).

В третьей главе найдены структурные уравнения три-ткани $W(p,q,p+q-1)$ общего вида:

$$\begin{aligned}
&d\omega^a = \omega^b \wedge \omega_b^a + \omega^p \wedge \omega_p^a,\\
&d\omega^p = \omega^p \wedge \Theta_{p+q}^{p+q} + \lambda_{au}\omega^a \wedge \omega^u + \mu_a\omega^a \wedge \Theta^{p+q},\\
&d\omega^u = \omega^v \wedge \omega_v^u + \omega^{p+q} \wedge \omega_{p+q}^u,\\
&d\omega^{p+q} = \omega^{p+q} \wedge \Theta_{p+q}^{p+q} + \lambda_{ua}\omega^u \wedge \omega^a + \mu_u\omega^u \wedge \Theta^{p+q},
\end{aligned}$$

$a,b,...=\overline{1,p-1}$, $u,v,...=\overline{p+1,p+q-1}$, и их дифференциальные продолжения. Формы

$$\begin{aligned}
&\Omega_b^a = d\omega_b^a - \omega_b^c \wedge \omega_c^a, \quad \Omega_p^a = d\omega_p^a - \omega_p^b \wedge \omega_b^a + \omega_p^a \wedge \Theta_{p+q}^{p+q}, \quad \Omega_{p+q}^{p+q} = d\Theta_{p+q}^{p+q},\\
&\Omega_v^u = d\omega_v^u - \omega_v^w \wedge \omega_w^u, \quad \Omega_{p+q}^u = d\omega_{p+q}^u - \omega_{p+q}^v \wedge \omega_v^u + \omega_{p+q}^u \wedge \Theta_{p+q}^{p+q}
\end{aligned}$$

называются формами кривизны три-ткани $W(p,q,p+q-1)$, а величины $\{\lambda_{au}, \mu_a, \mu_u\}$ образуют ее тензор кручения [6]. Слоения λ_1, λ_2 и λ_3 этой ткани задаются соответственно уравнениями

$$\lambda_1:\ \omega^u=0,\ \omega^{p+q}=0;\ \lambda_2:\ \omega^a=0,\ \omega^p=0;\ \lambda_3:\ \Theta^{p+q}\equiv\omega^p+\omega^{p+q}=0.$$

Известно [2], что формы кривизны классической три-ткани Рейдемейстера R, образованной слоениями одинаковой размерности r, могут

быть одновременно приведены к нулю на всем многообразии $\mathcal{M}$ и обратно: если формы кривизны некоторой три-ткани $W(r,r,r)$ приводятся к нулю, то такая ткань является тканью Рейдемейстера. Поскольку ткани $WR(p,q)$ являются, в определенном смысле, обобщением тканей R, то, следуя классической теории, в п. 3.3.1 мы рассматриваем три-ткань $W(p,q,p{+}q{-}1)$, формы кривизны которой равны нулю. Эта ткань обозначена $W^0(p,q,p+q-1)$. Изучение тканей $W^0(p,q,p+q-1)$ связывается со свойствами тензора кручения $\{\lambda_{ua},\mu_a,\mu_u\}$ и его подтензоров. Путем интегрирования структурных уравнений тканей $W^0(p,q,p{+}q{-}1)$ найдены конечные уравнения некоторых тканей (Теорема 13), в том числе, тканей типа $WR(p,p)$ и $WR(p,p+1)$, см. Таблицу 2.
Таблица 2

Уравнение ткани WR(p,q)	Тензорная характеристика
$z = x^1y^1 + ... + x^py^p + x^{p+1}$	$\mu_u \neq 0,\ \mu_a = 0$
$z = x^1y^1 + ... + x^py^p$	$\mu_u = \mu_a \neq 0$
$z = x^1y^1 + ... + x^{p-1}y^{p-1} + x^p + y^p$	$\mu_u = \mu_a = 0$

В п. 3.4 структурные уравнения ткани $W(p,q,p+q-1)$ приведены к виду

$$d\underset{i}{\theta} = \underset{i}{\theta} \wedge (\omega + \sum_\alpha b_{i\alpha}\underset{\alpha}{\vartheta}), \quad d\underset{\alpha}{\vartheta} = \underset{\alpha}{\vartheta} \wedge (\omega + \sum_i b_{i\alpha}\underset{i}{\theta}),$$

где $i = \overline{1,q}$, $\alpha = \overline{1,p}$. Из последних уравнений при $\underset{i}{\theta} = 0$ получаются структурные уравнения $(p{+}1)$-ткани $\tilde{W}(a,x)$. Ее слоения определяются уравнениями $\underset{1}{\vartheta} = 0$, ..., $\underset{p}{\vartheta} = 0$, $\underset{1}{\vartheta} + ... + \underset{p}{\vartheta} = 0$. При $\underset{\alpha}{\vartheta} = 0$ получаем структурные уравнения $(q{+}1)$-ткани $\tilde{W}(b,y)$, слоения которой определяются уравнениями $\underset{1}{\theta} = 0$, ..., $\underset{q}{\theta} = 0$, $\underset{1}{\theta} + ... + \underset{q}{\theta} = 0$.

В п. 3.5.1 показано, что дифференциальные продолжения структурных уравнений три-ткани $WR(p,q)$ имеют вид

$$d\omega = 0, \quad db_{i\alpha} = b_{i\alpha}(\sum_j b_{j\alpha}\underset{j}{\theta} + \sum_\beta b_{i\beta}\underset{\beta}{\vartheta}),$$

(Теорема 14). Путем интегрирования структурных уравнений три-ткани $WR(p,q)$ в п. 3.5.2 получены конечные уравнения всех тканей $WR(p,q)$ и соответствующие условия на тензор кручения, см. Таблицу 2.

Заметим, что эти уравнения совпадают с теми, которые получены путем интегрирования структурных уравнений ткани $W^0(p,q,p{+}q{-}1)$, см. Теорему 13. В п. 3.5.3 показано, что формы кривизны три-ткани $WR(p,q)$ равны нулю.

С другой стороны, каждое из этих уравнений определяет соответствующую бинарную физическую структуру, см. [19] и [17].

В **Главе 4** рассматривается произвольная три-ткань $W(p,q,r)$ при $p \leq q \leq r$. В п. 4.1 определена алгебраическая операция $(\circ)$ (по аналогии с определением координатного моноида три-ткани $W(p,q,p+q-1)$), названная также координатным моноидом. Доказана

Теорема 15 *Координатный моноид $\mu_{(a,b)}(\circ)$ три-ткани $W(p,q,r)$ существует только для тканей вида $W(\lambda l, \lambda m, \lambda(l+m-1))$. Координатный моноид три-ткани $W(\lambda l, \lambda m, \lambda(l+m-1))$ главноизотопен ее координатному группоиду.*

Для ткани $W(\lambda l, \lambda m, \lambda(l+m-1))$ обобщаются понятия конфигурации Рейдемейстера и ткани Рейдемейстера (они обозначены соответственно $R(\lambda l, \lambda m, \lambda(l+m-1))$ и $WR(\lambda l, \lambda m, \lambda(l+m-1))$), см. п. 4.2. Для ткани $WR(\lambda l, \lambda m, \lambda(l+m-1))$ определена функция

$$z_{l+1m+1} = \mathcal{C}(z_{st}, z_{sm+1}, z_{l+1t}),$$

где $z_{\bar{s}\bar{t}} = f(x_{\bar{s}}, y_{\bar{t}})$ — параметры наклонных слоев, образующих конфигурацию $R(\lambda l, \lambda m, \lambda(l+m-1))$, $z_{\bar{s}\bar{t}} = (z^{\xi}_{\bar{s}\bar{t}})$, $\bar{s} = \overline{1, l+1}$, $\bar{t} = \overline{1, m+1}$, $\xi = \overline{1, \lambda}$. Функция $\mathcal{C} = (\mathcal{C}^{\xi})$ является обобщением понятия сердцевины три-ткани $WR(p,q)$ и названа также сердцевиной три-ткани $WR(\lambda l, \lambda m, \lambda(l+m-1))$ (п. 4.3). Как и в случае ткани $WR(p,q)$, сердцевина ткани $WR(\lambda l, \lambda m, \lambda(l+m-1))$ вполне определяет координатный группоид этой ткани (Теорема 17), а существование сердцевины характеризует ткань $WR(\lambda l, \lambda m, \lambda(l+m-1))$ (Теорема 16).

В п. 4.4 доказано, что замыкание обобщенных конфигураций Рейдемейстера на ткани $WR(\lambda l, \lambda m, \lambda(l+m-1))$ эквивалентно выполнению в каждом координатном моноиде этой ткани некоторого тождества, обобщающего тождество ассоциативности для координатного моноида три-ткани $WR(p,q)$ (Теорема 18).

В пятой главе изучаются три-ткани, порождаемые действием локальной гладкой q-параметрической группы Ли G на гладком p-мерном многообразии Y, то есть ткани, определяемые гладкими функциями

$$f : G \times Y \to Y, \quad z = f(a,y) \equiv a \cdot y,$$

удовлетворяющими условиям:

$$f(e,y) = y, \quad f(a, f(b,y)) = f(\phi(a,b), y),$$

где $\phi(a,b)$ — операция в параметрической группе G, а e — единица этой группы. Такая ткань образована тремя слоениями

$$\lambda_1: \ a = const, \quad \lambda_2: \ y = const, \quad \lambda_3: \ z = f(a,y) = const$$

размерностей соответственно p, q и q на прямом произведении $\mathcal{M} = G \times Y$ и обозначена $GW(p,q,q)$, см. п. 5.1.4.

В п. 5.2 доказано, что ткани $GW(p,q,q)$ характеризуются замыканием на них обобщенных конфигураций Рейдемейстера $R_{x_0}(1,m)$, $m = [q/p]$ (Теорема 21). Для ткани $GW(p,q,q)$ обобщается понятие сердцевины, неявно задаваемой уравнениями

$$\Phi^\rho(z_{11}, z_{12}, ..., z_{1m+1}; z_{21}, z_{22}, ..., z_{2m+1}) = 0,$$

где $z_{11}, z_{12}, ..., z_{1m+1}; z_{21}, z_{22}, ..., z_{2m+1}$ — параметры наклонных слоев, входящих в конфигурацию $R_{x_0}(1,m)$, $\rho = \overline{1, (m+1)p - q}$, $\quad m = [q/p]$. В п. 5.3 доказана

Теорема 22 *Сердцевина три-ткани $GW(p,q,q)$, порождаемой группой Ли преобразований $f: G \times Y \to Y$, может быть записана в виде*

$$\varphi^\rho(z_{11}, z_{12}, ..., z_{1m}, z_{1m+1}) = \varphi^\rho(z_{21}, z_{22}, ..., z_{2m}, z_{2m+1}),$$

где φ^ρ – инварианты группы преобразований, $\rho = \overline{1, (m+1)p - q}$, $m = [q/p]$.

Этот факт проиллюстрирован в п.п. 5.4.2 и 5.4.3 на различных примерах. Так, сердцевина три-ткани $WR(1,3)$, порождаемой действием проективной группы на прямой, приводится к виду

$$\frac{(z_{11} - z_{12})(z_{13} - z_{14})}{(z_{11} - z_{13})(z_{12} - z_{14})} = \frac{(z_{21} - z_{22})(z_{23} - z_{24})}{(z_{21} - z_{23})(z_{22} - z_{24})}.$$

(Здесь инвариантом является, как известно, сложное отношение четырех точек).

В п. 5.4.2 показано, что сердцевина ткани $GW(p, mp, mp)$, допускающей координатный моноид $z = (u_1, u_2, ..., u_m) \circ v$, может быть записана в виде p уравнений

$$(z_{11}, z_{12}, ..., z_{1m})/z_{1m+1} = (z_{21}, z_{22}, ..., z_{2m})/z_{2m+1},$$

где "/" — правая обратная операция для ($\circ$). В частности, при $m = 1$ получается классическая групповая три-ткань $W(p,p,p)$, порождаемая

p-мерной группой G [1]. Сердцевина такой ткани определяется также p уравнениями вида $z_{11}/z_{12} = z_{21}/z_{22}$.

В п. 5.5 описаны три-ткани, порождаемые аффинной и проективной группами на плоскости и в пространстве. Для каждой из этих групп найдены многоточечные инварианты, а сердцевина соответствующей ткани записана в виде равенства инвариантов.

В п. 5.6 описано вложение ткани $GW(p,q,q)$ в три-ткань $W(q,q,q)$, порождаемую параметрической группой G. В п. 5.7 показано, как находить структурные уравнения ткани $GW(p,q,q)$ в виде

$$\begin{aligned}
d\underset{1}{\bar\omega}^\alpha &= \underset{1}{\bar\omega}^\beta \wedge \Theta^\alpha_\beta + \mu^\alpha_{u\beta}\underset{1}{\bar\omega}^u \wedge \underset{3}{\bar\omega}^\beta - \mu^\alpha_{\beta\gamma}\underset{1}{\bar\omega}^\beta \wedge \underset{1}{\bar\omega}^\gamma,\\
d\underset{1}{\bar\omega}^u &= \underset{1}{\bar\omega}^v \wedge \omega^u_v + \underset{1}{\bar\omega}^\beta \wedge \omega^u_\beta,\\
d\underset{2}{\bar\omega}^\alpha &= \underset{2}{\bar\omega}^\beta \wedge \Theta^\alpha_\beta + \mu^\alpha_{\beta\gamma}\underset{2}{\bar\omega}^\beta \wedge \underset{2}{\bar\omega}^\gamma,
\end{aligned}$$

$\alpha, \beta, ... = \overline{1,p}$; $u, v, ... = \overline{p+1,q}$, по уравнениям Маурера-Картана группы G

$$d\omega^i = c^i_{jk}\omega^j \wedge \omega^k,$$

$i, j, k, ... = \overline{1,q}$. Здесь ω^i — инвариантные формы группы Ли G, c^i_{jk} — ее структурный тензор, удовлетворяющий тождеству Якоби. Слоения ткани $GW(p,q,q)$ определяются уравнениями

$$\tilde\lambda_1 : \ \underset{1}{\bar\omega}^i = 0; \quad \tilde\lambda_2 : \ \underset{2}{\bar\omega}^\alpha = 0; \quad \tilde\lambda_3 : \ \underset{3}{\bar\omega}^\alpha = \underset{1}{\bar\omega}^\alpha + \underset{2}{\bar\omega}^\alpha = 0.$$

Этим методом найдены три-ткани, определяемые аффинной и проективной группами на прямой, а также группой движений и унимодулярной группой на плоскости.

В шестой главе вводится понятие локальной гладкой левой квазигруппы Бола преобразований и изучается многомерная три-ткань, порожденная действием этой квазигруппы. Квазигруппа преобразований определяется как действие локальной гладкой q-мерной квазигруппы $Q(*)$ на гладком p-мерном многообразии Y $\quad (p \leq q)$ и записывается в виде

$$f : Q \times Y \to Y, \quad z = f(a, y).$$

Функция f рассматривается с точностью до изотопических преобразований, причем в некоторых локальных координатах ранги матриц $(\partial f/\partial a)$ и $(\partial f/\partial y)$ предполагаются максимальными в каждой точке области определения. Такой подход позволяет связать с квазигруппой преобразований геометрический объект — некоторую три-ткань, образованную на прямом произведении $M = Q \times Y$ тремя слоениями

$$\lambda_1 : \ a = const, \quad \lambda_2 : \ y = const, \quad \lambda_3 : \ z = f(a, y) = const$$

размерностей соответственно p, q и q, см. п. 6.1.1. Эта ткань обозначена $QW(p, q, q)$, а функция f названа ее координатным группоидом.

В п. 6.1.2 рассматривается квазигруппа преобразований, удовлетворяющая тождеству

$$f(a, f^{-1}(b, f(a, y))) = f(a * b, y), \quad a, b \in Q, \quad y \in Y.$$

Показано, что этому тождеству на ткани $QW(p, q, q)$ соответствует конфигурация, аналогичная левой конфигурации Бола B_l, см. рис. 2. Поэтому группоид f, удовлетворяющий данному условию, назван квазигруппой Бола преобразований. Квазигруппа $Q(*)$ названа (по аналогии с теорией групп Ли преобразований) параметрической квазигруппой квазигруппы Бола преобразований. В п. 6.1.2 показано, что квазигруппа $Q(*)$ изотопна левой лупе Бола.

Три-ткань $QW(p, q, q)$, порожденная квазигруппой Бола преобразований, названа левой тканью Бола и обозначена $B_l(p, q, q)$. В п. 6.1.3 показано, что операция $(*)$ индуцирует на многообразии ткани $B_l(p, q, q)$ некоторый автоморфизм этой ткани, при котором вертикальные слои ткани переходят в вертикальные, а горизонтальные и наклонные слои ткани меняются местами.

В п. 6.2 вводится понятие обобщенной левой конфигурации Бола $B_l(1, m)$ на три-ткани $W(p, q, q)$. Доказано, что замыкание конфигураций $B_l(1, m)$ характеризует три-ткань $B_l(p, q, q)$ (Теорема 28). В координатном моноиде ткани $B_l(p, mp, mp)$ (при других размерностях моноид не существует, см. Теорему 15) найдено тождество, соответствующее замыканию на этой ткани обобщенных конфигураций Бола $B_l(1, m)$. В п. 6.3 доказана

Теорема 29 *Пусть $u_1, u_2, ..., u_m$ и v — произвольные наклонные слои три-ткани $W(p, mp, mp)$. Ткань $W(p, mp, mp)$ будет тканью $B_l(p, mp, mp)$ тогда и только тогда, когда в каждом ее координатном моноиде $\mu_{(a,b)}(\circ)$ выполняется следующее тождество*

$$((u_1, ..., u_m) \circ u_1, ..., (u_1, ..., u_m) \circ u_m) \circ v = (u_1, .., u_m) \circ ((u_1, .., u_m) \circ v).$$

Это тождество названо тождеством обобщенной альтернативности, поскольку при $m = 1$ оно обращается в обычное тождество левой альтернативности $(u \circ u) \circ v = u \circ (u \circ v)$, которое выполняется в координатных лупах три-ткани Бола B_l, образованной слоениями одинаковой размерности.

В п. 6.4.2 доказано, что если ткани $W(p, q, q)$ и $\tilde{W}(p, q, q)$ эквивалентны, то в соответствующих реперах их тензоры кручения и кривизны совпадают (Теорема 30). Справедливо и обратное утверждение (Теорема 31), обобщающее аналогичный результат классической теории, см. [7].

В п. 6.5 найдены структурные уравнения три-ткани $B_l(p, q, q)$:

$$
\begin{aligned}
&d\underset{3}{\omega}^\alpha = \underset{3}{\omega}^\beta \wedge \omega_\beta^\alpha + \underset{3}{\Theta}^\alpha, \\
&d\underset{1}{\omega}^u = \underset{1}{\omega}^v \wedge \omega_v^u + (\underset{3}{\omega}^\beta - \underset{2}{\omega}^\beta) \wedge \omega_\beta^u, \\
&d\underset{2}{\omega}^\alpha = \underset{2}{\omega}^\beta \wedge \omega_\beta^\alpha + \underset{2}{\Theta}^\alpha,
\end{aligned}
$$

и их дифференциальные продолжения

$$
\begin{aligned}
&d\omega_\beta^\alpha - \omega_\beta^\gamma \wedge \omega_\gamma^\alpha = b_{\beta\gamma\delta}^\alpha \underset{2}{\omega}^\gamma \wedge \underset{3}{\omega}^\delta + b_{\beta\gamma w}^\alpha (\underset{2}{\omega}^\gamma - \underset{3}{\omega}^\gamma) \wedge \underset{1}{\omega}^w, \\
&d\omega_v^u - \omega_v^w \wedge \omega_w^u = b_{v\gamma\delta}^u \underset{2}{\omega}^\gamma \wedge \underset{3}{\omega}^\delta + b_{v\gamma w}^u (\underset{2}{\omega}^\gamma - \underset{3}{\omega}^\gamma) \wedge \underset{1}{\omega}^w, \\
&d\omega_\beta^u - \omega_\beta^v \wedge \omega_v^u - \omega_\beta^\gamma \wedge \omega_\gamma^u = b_{\beta\gamma\delta}^u \underset{2}{\omega}^\gamma \wedge \underset{3}{\omega}^\delta + b_{\beta\gamma w}^u (\underset{2}{\omega}^\gamma - \underset{3}{\omega}^\gamma) \wedge \underset{1}{\omega}^w, \\
&(d\omega_\beta^\alpha - \omega_\beta^\gamma \wedge \omega_\gamma^\alpha) \wedge \underset{3}{\omega}^\beta + d\underset{3}{\Theta}^\alpha + \underset{3}{\Theta}^\beta \wedge \omega_\beta^\alpha = 0, \\
&(d\omega_\beta^\alpha - \omega_\beta^\gamma \wedge \omega_\gamma^\alpha) \wedge \underset{2}{\omega}^\beta + d\underset{2}{\Theta}^\alpha + \underset{2}{\Theta}^\beta \wedge \omega_\beta^\alpha = 0,
\end{aligned}
$$

где $b_{\beta(\gamma\delta)}^\alpha = 0, \; b_{v(\beta\gamma)}^u = 0, \; b_{\alpha(\beta\gamma)}^u = 0$, (Теорема 32).

В п. 6.6 найдены конечные уравнения некоторой ткани $B_l(2, 3, 3)$ путем интегрирования ее структурных уравнений с единственной отличной от нуля компонентой тензора кривизны b_{223}^1:

$$
\begin{aligned}
&z^1 = x^1 + y^1 - x^3 y^2 (x^2 + y^2), \\
&z^2 = x^2 + y^2.
\end{aligned}
$$

С другой стороны, последние уравнения определяют трехпараметрическую квазигруппу Бола преобразований на двумерном многообразии с параметрической квазигруппой

$$
\begin{aligned}
&c^1 = 2a^1 - b^1 - (a^2 - b^2)(a^2(a^3 - b^3) + a^3(a^2 - b^2)), \\
&c^2 = 2a^2 - b^2, \\
&c^3 = 2a^3 - b^3,
\end{aligned}
$$

причем левая обратная квазигруппа последней изотопна средней лупе Бола B_m, уравнения которой найдены из других соображений в [22].

Список литературы

[1] Акивис М. А. О канонических разложениях уравнений локальной аналитической квазигруппы// Докл. АН СССР.— 1969.— Т. 188,— № 5.— С. 967–970.

[2] Акивис М. А. О три-тканях многомерных поверхностей// Тр.геом.сем. ВИНИТИ АН СССР.— 1969.— Т. 2.— С. 7–31.

[3] Акивис М. А. О локальных алгебрах многомерных три-тканей// Сиб. мат. ж.— 1976.— Т. 17.— № 1.— С. 5–11.

[4] Акивис М. А. Об интегрировании структурных уравнений три-ткани Муфанг минимальной размерности// Дифференциальная геометрия.— Калинин.— 1977.— С. 3–9.

[5] Акивис М. А. Дифференциальная геометрия тканей// Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Пробл. геом.— 1983.— Т. 15.— С. 187–213.

[6] Акивис М. А., Гольдберг В. В. О многомерных три-тканях, образованных поверхностями разных размерностей// Докл. АН СССР.— 1972.— Т. 203.— № 2.— С. 263–266.

[7] Akivis M. A., Shelekhov A. M. Algebra and Geometry of Multidimensional Three-Webs// Kluwer Academic Publishers.— Dordrecht/ Boston/ London.— 1992.— xvii+358 pp.

[8] Белоусов В. Д. Основы теории квазигрупп и луп.— М.: Наука.— 1967.— 223 с.

[9] Белоусов В. Д., Рыжков В. В. Геометрия тканей// Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Алгебра. Топология. Геометрия.— 1972.— Т. 10.— С. 159–188.

[10] Бляшке В. Введение в геометрию тканей.— М.: ГИФМЛ.— 1959.— 144 с.

[11] Blaschke W., Bol G. Geometrie der Gewebe// Springer–Verlag.— Berlin.— 1938.— viii+339 pp.

[12] Bol G. Uber 3-Gewebe in vierdimensionalen Raum.// Math. Ann.— 1935.— p. 431–463.

[13] Гольдберг В. В. Трансверсально-геодезические, шестиугольные и групповые три-ткани, образованные поверхностями разных размерностей// Сб. статей по дифферен. геом.— Калинин.— 1974.— С. 52–64.

[14] Гольдберг В. В. О приводимых, групповых и $(2n+2)$-эдричных $(n+1)$-тканях многомерных поверхностей// Сиб. мат. ж.–1976.–№ 1.–С. 44–57.

[15] Горбацевич В. В., Онищик А. Л. Группы Ли преобразований// Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления.— 1988.— Т. 20.— С. 103–240.

[16] Кузьмин Е. Н. О связи между алгебрами Мальцева и аналитическими лупами Муфанг// Алгебра и логика.— 1971.— Т. 10.— № 1.— С. 3–22.

[17] Кулаков Ю. И., Владимиров Ю. С., Карнаухов А. В. Введение в теорию физических структур и бинарную геометрофизику// М.: Архимед.— 1992.— 183 с.

[18] Мальцев А. И. Аналитические лупы// Мат. сб.— 1955.— Т. 36.— № 3.— С. 569–575.

[19] Михайличенко Г. Г. Решение функциональных уравнений в теории физических структур// Докл. АН СССР.— 1972.— Т. 206.— № 5.— С. 1056–1058.

[20] Нестеров А. И. Квазигрупповые идеи в физике// В сб. Квазигруппы и неассоциативные алгебры в физике. Труды института физики.— Тарту.— 1990.— Т. 66.— С. 107–120.

[21] Сабинин Л. В. Методы неассоциативной алгебры в дифференциальной геометрии// Добавление к книге Ш.Кобаяси и К.Номидзу "Основы дифференциальной геометрии".— М.: Наука.— 1981.— С. 293–339.

[22] Федорова В. И. Шестимерные три-ткани Боля с симметричным тензором a_{ij}// Ткани и квазигруппы.— Калинин.— 1981.— С. 110–123.

[23] Федорова В. И. Об условии, определяющем многомерные три-ткани Боля// Сиб. мат. ж.— 1987.— Т. 19.— № 4.— С. 922–926.

[24] Hofmann K. H., Strambach K. The Akivis algebra of a homogeneous loop// Mathematika.— 1986.— V. 33.— № 1.— p. 87–95.

[25] Chern S. S. Eine Invariantentheorie der Dreigewebe aus r- dimensionalen Mannigfaltigkeiten in R_{2r}// Abh. Math. Sem. Univ.— Hamburg.— 1936.— V. 11.— № 1-2.— p. 336–358.

Публикации автора по теме диссертации

1. Толстихина Г. А. О сердцевине координатной квазигруппы некоторой шестимерной три-ткани Боля// Ткани и квазигруппы.— Калинин.— 1990.— С. 18–22 (0,4 п.л.).

2. Tolstikhina G. A. The locally symmetric s-structure determined by a Bol web// Webs and Quasigroups.— Tver.— 1991.— p. 147–155 (0,6 п.л.).

3. Толстихина Г. А. О локально плоской структуре, связанной с тканью Боля// Алгебраические методы в геометрии.— Москва. РУДН.— 1992.— С. 56–61 (0,4 п.л.).

4. Толстихина Г. А. О сердцевине координатной квазигруппы три-ткани Боля// Фундам. пробл. мат. и мех.: Мат.— Ч. 1.— МГУ.— Москва.— 1994.— С. 63–64 (0,1 п.л.).
5. Tolstikhina G. A. On associative smooth monoids// Webs and Quasigroups.— Tver.— 2002.— p. 53–59 (0,44 п.л.).
6. Толстихина Г. А. Алгебра и геометрия три-тканей, образованных слоениями разных размерностей// Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Современная математика и ее приложения.– Т. 32(2005).- С. 29-116 (5,4 п.л.).
7. Толстихина Г. А., Шелехов А. М. О три-тканях $W(p, q, p+q-1)$, на которых замыкаются обобщенные конфигурации Рейдемейстера// Деп. в ВИНИТИ 13.08.2001. №1869-В2001 (2,9 п.л.).
8. Толстихина Г. А., Шелехов А. М. Обобщенная ассоциативность в гладких группоидах// Докл. РАН.– 2002.– Т. 383.– № 1.– С. 32–33 (0,1 п.л.).
9. Толстихина Г. А., Шелехов А. М. Три-ткани, определяемые группами преобразований// Докл. РАН.— 2002.— Т. 385.— № 4.— С. 1–3 (0,2 п.л.).
10. Tolstikhina G. A., Shelekhov A. M. The three-web determined by affine transformation group// Webs and Quasigroups.— Tver.— 2002.— p. 46–49 (0,25 п.л.).
11. Толстихина Г. А., Шелехов А. М. Вложение три-ткани, определяемой группой преобразований, в групповую три-ткань// Деп. в ВИНИТИ 2003. № 880 - В2003 (1,1 п.л.).
12. Толстихина Г. А., Шелехов А. М. Многоточечные инварианты групп преобразований и определяемые ими три-ткани// Изв. Вузов. Мат.— 2003.— № 11(498).— С. 82–87 (0,4 п.л.).
13. Толстихина Г. А., Шелехов А. М. О квазигруппах Бола преобразований// Докл. РАН.— 2005.— Т. 401.— № 2.— С. 166–168 (0,2 п.л.).
14. Толстихина Г. А., Шелехов А. М. О три-ткани Бола, образованной слоениями разных размерностей// Изв. Вузов. Мат.— 2005.— № 5(516).— С. 56–62 (0,6 п.л.).

В работах, выполненных в соавторстве, вклад автора составляет от 50% до 75%.